ДВУХСЛОЙНОЕ ТЕЧЕНИЕ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ

Н. В. Вагизова, А. В. Кузнецов
НИИММ Казанского государственного университета

Рассматривается задача о взаимодействии двух потоков тяжелой невязкой жидкости в канале с твердыми неподвижными стенками. На границе раздела двух потоков в поперечном поле силы тяжести расположена полубесконечная твердая стенка $y = f(x)$, $x < 0$. Поступательные скорости V_1, V_2 и плотности ρ_1, ρ_2 потоков различные. Течение считается потенциальным.

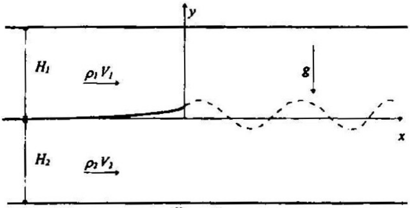

Рис.1

Рассматривается симметричный канал $H_1 = H_2 = H = \pi h$. Схема течения представлена на рис. 1. Здесь $\beta = V_2/V_1$, $\gamma = \rho_1/\rho_2$, $\nu = (1-\gamma)/l Fr$, $Fr = V_1^2/g\,l$, $\delta = \beta^2/\gamma$, l – характерная длина.

Течения в соответствующих областях описываются комплексными потенциалами

$$W_j(z) = V_j z + w_j(z), w_j = \varphi_j + i\psi_j, \ z = x + iy.$$

В линейном приближении задача сводится к отысканию функций $\psi_j(x,y)$ по краевым условиям. При решении поставленной задачи используется представление Лапласа для функций тока

$$\psi_j(x,y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty i}^{\infty i}(A_j(\xi)\,e^{i\xi y} + B_j(\xi)e^{-i\xi y})e^{\xi x}d\xi.$$

В результате удовлетворения граничным условиям задача свелась к решению парного интегрального уравнения для неизвестной функции, входящей в это представление [1]. Решение полученного интегрального уравнения находится методом Винера-Хопфа [2]. Рассматривается частный случай $f'(x) = qe^{px}$, $p > 0$, $x < 0$, так как в этом случае решение интегрального уравнения определяется сразу.

Граница раздела потоков определяется уравнением

$$y = -\psi_j(x,0)/V_j\,, \quad x > 0.$$

Компоненты результирующей силы давления $R = X + iY$ вычисляются по формуле

$$(X,Y) = \int_{-\infty}^{0}\left(-\frac{df}{dx}, 1\right)\Delta P\,dx,$$

где $\Delta P = P_2 - P_1$. Относя *X, Y* к скоростному напору $\rho V_1^2/2$ и к ширине канала *H*, получим выражения для коэффициентов C_x и C_Y.

Было установлено, что поведение линии раздела сред определяется параметром $a = (\delta + 1)\gamma/H\nu$. Из полученного решения следует, что в случае $a < 1$ граница раздела имеет вид волны определенной длины $\lambda = 2\pi/\eta_0$ и амплитуды, где η_0 – корень уравнения $ay = th\,y$, $y = H\eta$. На рис. 2 представлены результаты численного расчета линии раздела сред для различных чисел Фруда, $\beta = 0.15$, $\gamma = 0.1$ (линия 1: $Fr = 1$; $a = 0.043$; $\eta_0 = 7.347$; $C_x = 0.0046$; $C_Y = -0.084$; линия 2: $Fr = 3$; $a = 0.129$; $\eta_0 = 2.449$; $C_x = 0.023$; $C_Y = -0.177$; линия 3: $Fr = 4$; $a = 0.171$; $\eta_0 = 1.837$; $C_x = 0.031$; $C_Y = -0.222$). Из рисунка видно, что с ростом параметра a увеличиваются длина волны λ и ее амплитуда. При $a > 1$ такие волны отсутствуют. Результаты расчета в этом случае представлены на рис. 3. Кривые получены при $\beta = 0.9$, $\gamma = 0.7$ (линия 1: $Fr = 1$; $a = 1.602$; $C_x = 0.031$; $C_Y = -0.281$; линия 2: $Fr = 2$; $a = 3.204$; $C_x = 0.028$; $C_Y = -0.266$; линия 3: $Fr = 4$; $a = 6.408$; $C_x = 0.027$; $C_Y = -0.261$; линия 4: $Fr = \infty$; $a = \infty$; $C_x = 0.021$; $C_Y = -0.257$).

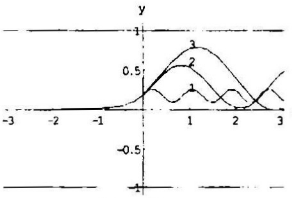

Рис. 2

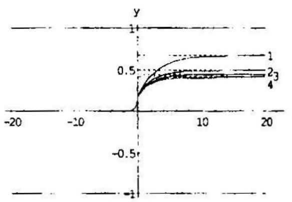

Рис. 3

Упомянутое ранее парное интегральное уравнение в случае $f'(x) = 0$, допускает нетривиальное решение. Из этого следует, что при $x \to \infty$ на поверхности раздела тяжелых жидкостей при отсутствии внешних возмущений возникают свободные волны произвольной амплитуды и той же определенной длины $\lambda = 2\pi/\eta_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов А. В. *Стационарное взаимодействие ограниченных потоков жидкости* // НИИММ им. Н.Г. Чеботарева. 1993-1997. – Казань: “Дас”, 1998. – С. 171 – 173.
2. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. - М.: ИИЛ, 1962. – 280 с.